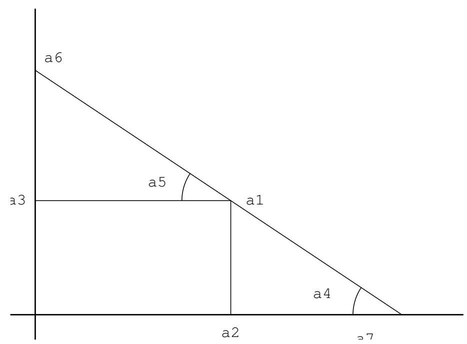
Soluciones a los ejercicios de evaluación (6^{a} entrega)

Ejercicio 1 Dado un punto $P=(a,b)$ situado en el primer cuadrante del plano, determinar el segmento con extremos en los ejes coordenados y que pasa por P que tiene longitud mínima.

Explica por qué la solución de este ejercicio resuelve también los ejercicios números 17 y 23 de la relación de Ejercicios de Cálculo Diferencial.

Solución

En un ejercicio como este *lo primero que hay que hacer es elegir la variable* en función de la cual vamos a calcular la longitud del segmento $\overline{AB}$. Tomando como variable φ, es decir, la medida en radianes del ángulo indicado en la figura, la longitud del segmento $\overline{AB}$ viene dada por



$$f(\varphi)=\frac{b}{\operatorname{sen}\varphi}+\frac{a}{\cos\varphi} \qquad (0<\varphi<\pi/2)$$

Debemos calcular el mínimo absoluto de f. Tenemos que:

$$f'(\varphi)=\frac{-b\cos\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi}+\frac{a\operatorname{sen}\varphi}{\cos^2\varphi}$$

Se obtiene enseguida que $f'(\varphi)$ se anula en un único punto $\varphi_o\in]0,\pi/2[$ que viene dado por $\operatorname{tg}(\varphi_o)=\sqrt[3]{b/a}$.

Es fácil justificar que f tiene en φ_o un mínimo absoluto. En efecto, como $\lim\limits_{x\to 0}f'(\varphi)=-\infty$, y $\lim\limits_{x\to\pi/2}f'(\varphi)=+\infty$ se sigue que:

$$\varphi\in]0,\varphi_o[\Longrightarrow f'(\varphi)<0, \quad \varphi\in]\varphi_o,\pi/2[\Longrightarrow f'(\varphi)>0$$

por tanto, f es estrictamente decreciente en $]0,\varphi_o]$ y estrictamente creciente en $[\varphi_o,\pi/2[$, lo que implica que $f(\varphi_o)\leqslant f(\varphi)$ para todo $\varphi\in]0,\pi/2[$.

Para calcular la longitud mínima $f(\varphi_o)$, basta tener en cuenta que:

$$1+\operatorname{tg}^2(\varphi_o)=\frac{1}{\cos^2(\varphi_o)}=1+\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}\Longrightarrow\frac{a}{\cos(\varphi_o)}=a^{2/3}\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{1/2}$$

Fácilmente se obtiene ahora que $\dfrac{b}{\operatorname{sen}(\varphi_o)}=b^{2/3}\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{1/2}$ con lo que la longitud mínima buscada viene dada por:

$$f(\varphi_o)=\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}$$

Otra forma de calcular la longitud del segmento $\overline{AB}$ consiste en considerar la ecuación general $y = \lambda(x-a)+b$ de las rectas que pasan por el punto $P=(a,b)$. Las intersecciones de dicha recta con los ejes son los puntos $A=(a-b/\lambda,0)$ y $B=(0,-a\lambda+b)$. Por tanto, la longitud del segmento $\overline{AB}$ viene dada por:

$$g(\lambda)=\sqrt{\left(a-\frac{b}{\lambda}\right)^2+(b-a\lambda)^2} \qquad (\lambda<0)$$

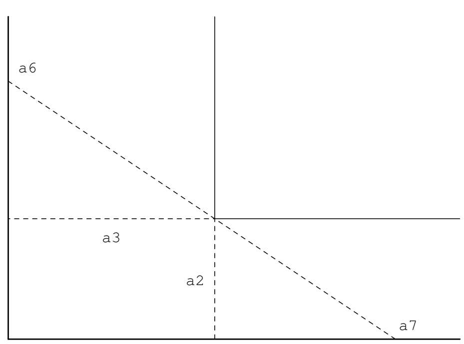
Otra forma de calcular la longitud del segmento $\overline{AB}$ consiste en introducir las variables x e y tales que $A=(a+x,0)$, $B=(0,b+y)$, como se indica en la figura. La longitud del segmento $\overline{AB}$ viene dada por $H(x,y)=\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2}$. Esta función, aparentemente, depende de dos variables, pero dichas variables *no son independientes*, pues los puntos A, P y B están alineados. Por semejanza de triángulos se obtiene que $x/b=a/y$, por lo que $y=(ab)/x$. En consecuencia, la longitud del segmento $\overline{AB}$ viene dada por: $h(x)=\sqrt{(a+x)^2+(b+(ab)/x)^2} \quad (x>0)$.

Tanto si se usa la función g como la h, debemos obtener un mínimo absoluto y, como son raíces cuadradas, es suficiente que calculemos el mínimo absoluto de la función radicando (las raíces respetan el orden en $\mathbb{R}_o^+$). Es decir, las funciones g y h alcanzan su mínimo absoluto en el mismo punto en que lo alcanzan las funciones:

$$G(\lambda)=\left(a-\frac{b}{\lambda}\right)^2+(b-a\lambda)^2 \quad (\lambda<0); \qquad H(x)=(a+x)^2+\left(b+\frac{ab}{x}\right)^2 \quad (x>0)$$

La solución obtenida resuelve también el problema siguiente (ejercicio 17):

Calcular la longitud de la escalera más larga que llevada en posición horizontal puede pasar por la esquina que forman dos corredores de anchuras respectivas a y b.



Es evidente que *la longitud de la escalera tiene que ser menor o igual que la longitud de cualquier segmento* $\overline{AB}$ como el de la figura. Por tanto, la longitud de la escalera más larga que puede pasar es igual a la longitud mínima del segmento $\overline{AB}$.

La solución del ejercicio 23 se obtiene también de la misma forma.

Ejercicio 2 Calcula la derivada en $x=0$ de la función $f:]-\pi/2,\pi/2[\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\left(\frac{2-2\cos x}{x^2}\right)^{1/x}$$

para $x\neq 0$ y $f(0)=1$. Explica con detalle lo que haces.

Solución

Es más fácil estudiar la derivabilidad de $\varphi(x)=\log f(x)$. Nótese que al ser $f(x)=\exp(\varphi(x))$, en todo punto a en que sea derivable φ también, en virtud de la regla de la cadena, será derivable f siendo $f'(a)=\varphi'(a)\exp(\varphi(a))=\varphi'(a)f(a)$. Tenemos que

$$\varphi(x)=\frac{\log\left(\dfrac{2-2\cos x}{x^2}\right)}{x}$$

para $x\neq 0$, y $\varphi(0)=0$. Para estudiar la derivabilidad de φ en $x=0$ consideremos el cociente:

$$H(x)=\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\frac{\log\left(\dfrac{2-2\cos x}{x^2}\right)}{x^2}$$

Se trata de calcular $\lim\limits_{x\to 0}H(x)$. Puesto que

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x}{x^2}=1 \qquad (1)$$

el límite buscado es una indeterminación de la forma $0/0$ y se dan las condiciones que permiten aplicar la regla de L'Hôpital. Tenemos entonces, supuesto que los límites en cuestión existen:

$$\lim_{x\to 0}H(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{2-2\cos x}\,\dfrac{2x^2\operatorname{sen}x-2x(2-2\cos x)}{x^4}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen}x+2\cos x-2}{x^4}$$

donde hemos tenido en cuenta (1). Podemos volver a usar la regla de L'Hôpital para calcular el último límite, obteniendo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen}x+2\cos x-2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\operatorname{sen}x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\operatorname{sen}x}{12x^2}=\frac{-1}{12}$$

Hemos probado así que f es derivable en 0 y $f'(0)=-1/12$.

Nota No debe calcularse la derivada de f en 0 aplicando la regla de L'Hôpital para calcular el límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, pues entonces lo que haremos será calcular $\lim_{x\to 0}f'(x)$. La existencia de este límite, junto con la continuidad de f en 0, implican que f *tiene derivada continua en* 0 y eso es más de lo que se pide.

Ejercicio 3 Estudiar, según los valores de α, el número de ceros, contando multiplicidades cuando proceda, de la función polinómica $f(x) = 3x^5 + 5x^3 - 30x - \alpha$. Explica con detalle lo que haces.

Solución

Como consecuencia del teorema de Rolle, si la derivada de una función tiene k ceros (reales) distintos entonces la función *no puede tener más de* $k+1$ ceros (reales) distintos (¡pero puede que no tenga ninguno!). Sabemos también, como consecuencia del teorema de los ceros de Bolzano, que todo polinomio de grado impar tiene por lo menos un cero real, lo que implica que *contando cada cero tantas veces como indica su multiplicidad, todo polinomio de grado impar tiene un número impar de ceros reales*.

En nuestro caso, $f'(x) = 15x^4 + 15x^2 - 30 = 15(x^2+2)(x^2-1)$, es decir, f' tiene dos ceros reales por lo que f *no puede tener más de tres* (pero todavía no sabemos si los tiene). Lo que es seguro es que f tiene por lo menos un cero real y en el caso de que tenga más de un cero real debe tener tres (que pueden ser simples o uno simple y otro doble). Veamos cuándo ocurre una cosa u otra. Tenemos que f es inyectiva en los intervalos $]-\infty,-1]$, $[-1,1]$ y $[1,+\infty[$ (porque su derivada no se anula en ningún punto de dichos intervalos excepto en los extremos), además $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Deducimos que para que f tenga tres ceros reales simples, uno en cada intervalo $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ y $]1,+\infty[$, *es necesario y suficiente* que $f(-1) = 22-\alpha > 0$ y $f(1) = -22-\alpha < 0$ lo que ocurre cuando $-22 < \alpha < 22$.

Cuando $\alpha = 22$ entonces $f(-1) = 0$ y $f(1) < 0$, por lo que f tiene también tres ceros reales: uno simple en el intervalo $]1,+\infty[$ y otro doble (porque también anula a la derivada) en -1.

Cuando $\alpha = -22$ entonces $f(-1) > 0$ y $f(1) = 0$, por lo que f tiene también tres ceros reales: uno simple en el intervalo $]-\infty,-1[$ y otro doble (porque también anula a la derivada) en 1.

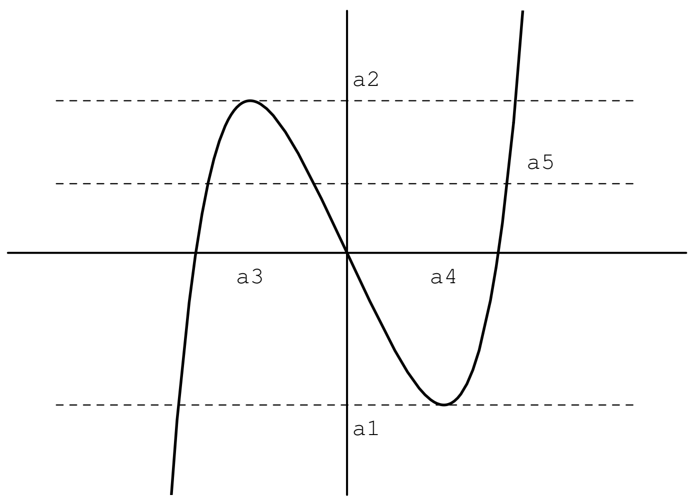
Cuando $\alpha > 22$ o $\alpha < -22$, f sólo tiene un cero real (porque no puede tener tres ceros reales simples ni tampoco un cero real doble).

La discusión anterior puede hacerse también dibujando la gráfica de la función polinómica $h(x) = 3x^5 + 5x^3 - 30x$ y viendo cuántos cortes tiene dicha gráfica con la recta horizontal $y = \alpha$. Para ello observemos que h y f tienen la misma derivada, por lo que:

$$x < -1 \Longrightarrow h'(x) > 0, \quad -1 < x < 1 \Longrightarrow h'(x) < 0, \quad x > 1 \Longrightarrow h'(x) > 0$$

por lo que h es estrictamente creciente en $]-\infty,-1]$, estrictamente decreciente en $[-1,1]$ y estrictamente creciente en $[1,+\infty[$. Deducimos que h tiene en -1 un máximo relativo y en 1 un mínimo relativo. Además la derivada segunda $h''(x) = 30x(x^2+1)$ se anula en $x = 0$ siendo $h''(x) < 0$ para

$x < 0$ y $h''(x) > 0$ para $x > 0$, es decir, h es cóncava en $]-\infty, 0[$ y convexa en $]0, +\infty[$. Con esta información ya podemos dibujar su gráfica.



Nótese que como $f(x) = h(x) + \alpha$, la gráfica de f se obtiene trasladando la de h hacia arriba (si $\alpha > 0$) o hacia abajo (si $\alpha < 0$). Se ve así claramente, que cuando $\alpha = -22$ o $\alpha = 22$, la gráfica de f *es tangente al eje de abscisas* en el punto -1 o en el 1 donde hay un cero doble.